数理解析研究所講究録
720巻 1990年 35-45

Remarks on semilinear G-spheres

大阪大学・理 長崎 生光 (Ikumitsu Nagasaki)

§0. 序

Gはコンパクト・リー群とする。半線形G球面 Σ とは，任意の閉部分群 H に対して，H不動点集合が(ホモトピー)球面となっているか，または空集合になっている微分可能閉G多様体のことである。G－CW複体で類似の性質を満たすものはホモトピー表現といわれている。半線形G球面あるいはホモトピー表現は線形G球面すなわち表現の球面をモデルにして定義されたものであり，その研究の主要な目的はGホモトピー型の分類である。ホモトピー表現については，tom Dieck-Petrie [7] 以来多くの人の研究によってそのGホモトピー型の分類は詳しくわかっている。(もっともGによるのではあるが。) そこでこれらの結果をふまえ半線形G球面の分類に興味は移ってきた。半線形G球面の分類はしか、

モトピー表現の分類ができているとして）つぎの問題を解けばよい。

問題（tom Dieck）．　どのホモトピー表現のGホモトピー型が半線形G球面で実現できるか？

この問題は基本的には同変手術の問題であると思われるが様々な困難があるため，ほんの限られた場合にしか分っていない（[6]）。

しかし，次のことは容易にわかる。半線形G球面がG不動点を持てばそれは線形G球面のGホモトピー型をもつ。つまりG不動点をもち線形G球面のGホモトピー型をもたないホモトピー表現は半線形G球面では実現できないことになる。（この様なホモトピー表現は多く存在する。）そこで我々は次の問題を考えてみたい。

問題．非線形な（Gホモトピー型をもつ）半線形G球面は存在するか？

注意．（1）Gが素数べき位数の巡回群の時は非線形な半線形G球面は存在しない。

(2) 非線形な半線形G球面の例がいくつか知られている。
([3], [7], [9])

我々は次節で次の定理を示したい。

定理A. 非可解なコンパクト・リー群Gについて，多くの非線形な半線形G球面が存在する。

§1. 半線形G球面の非線形性

半線形G球面の構成にはOliverの結果を使う。Oliverは次の結果を示している。

定理1 ([14]) Gが非可解コンパクト・リー群ならば，不動点自由作用をもつ半線形G球体Dが存在する。

ここで半線形G球体とは，任意の閉部分群Hについて，H不動点集合が球体または空集合となるコンパクト多様体のことである。不動点自由作用とはG不動点が空集合となる作用のことである。

さて，半線形G球体の直積は再び半線形G球体であることと半線形G球体の境界は半線形G球面であることに注意すれば，我々は次のような半線形G球面の族を作ることができる。

$$\Sigma_n = \partial(D \times D(\mathbb{R}^n))$$

ここでDは定理1で存在するDである。また $D(\mathbb{R}^n)$ は自明な作用をもつ n 次元球体を表す。

これらの Σ_n のほとんどは非線形であることを示したい。我々はGホモトピー不変量の一つである次元関数を調べることによって非線形性を示す。一般に半線形G球面 Σ の次元関数 $\mathrm{Dim}\,\Sigma$ を次で定義する。

$$\mathrm{Dim}\,\Sigma(H) = \dim \Sigma^H + 1 \qquad H \leqq G$$

$\mathrm{Dim}\,\Sigma = \mathrm{Dim}\,S(V) - \mathrm{Dim}\,S(W)$ となる表現 V, W が存在するとき次元関数 $\mathrm{Dim}\,\Sigma$ は安定的線形と言う。明らかに Σ が線形であればその次元関数は安定的線形である。

定理Aは次の結果から従う。

定理2．Gが非可解であれば，高々一つの n を除いて，Σ_n

の次元関数は安定的線形ではない。

証明．仮に Σ_n と Σ_m の次元関数が安定的線形とする。（但し $n<m$ とする。）ここで，関数 F を

$$F = \mathrm{Dim}\,\Sigma_m + \mathrm{Dim}\,S(\mathbb{R}^{m-n}) - \mathrm{Dim}\,\Sigma_n$$

と置く。容易に分かるように

$$F(H) = \begin{cases} m-n & D^H = \phi \text{ のとき} \\ 0 & D^H \neq \phi \text{ のとき} \end{cases}$$

である。特に $F(G) \neq 0$ である。一方，安定的線形ということから F は $\mathrm{Dim}\,S(V) - \mathrm{Dim}\,S(W)$ の形をもつ。位相的巡回部分群 C に対しては，Smith 理論より $D^C = \phi$ がわかる。したがって，$F(C) = 0$ である。すなわち，$\dim V^C = \dim W^C$ となる。ところで表現論から次のことがわかる。

任意の位相的巡回部分群 C に対して $\dim V^C = \dim W^C$

であれば，任意の閉部分群 H に対して $\dim V^H=\dim W^H$ が成り立つ。

このことから $F(G)=0$ が導かれる。これは矛盾である。したがって定理は示された。

注意 (1) 不動点自由作用をもつ半線形球体でその境界が線形作用であるようなものが存在する。実際，[11] で構成された S^6 上の一不動点作用を考え，不動点の周りのG不変な開球を取り除いたものはそのような例になっている。
(2) G が nilHoral（すなわち真閉部分群 H の WH が非自明な群）であれば次元関数はいつでも安定的線形である。([1]).

§2. 半線形G球面とBurnside環の可逆元

この節では次の定理を示すのが目標である。

定理3. G が非可解であれば，半線形G球面で実現できるが表現では実現されないBurnside環の可逆元が存在する。

一般に，ホモトピー表現 X に対して $1-[X]$ はBurnside環の可逆元を表す。逆に，Burnside環の可逆元がこのような形で書けるときその可逆元は X で実現できるという。特に X が線形 G 球面でとれるとき，表現で実現できるといい，半線形 G 球面でとれるとき半線形 G 球面で実現されるという。

証明．G が非可解であるから，前節でも述べたように，不動点自由な半線形 G 球体 D が存在する。必要なら $D\times D\times D(\mathbb{R}^1)$ を考えることにより D^H が空でないとき $\dim D^H$ は奇数としてよい。半線形 G 球面で実現されている可逆元 $u=1-[\partial D]$ を考える。この u が表現で実現できないことを示せばよい。各不動点集合のEuler数を見れば $1-[\partial D]=1-2[D]$ がわかる。ところが次の命題で述べるように $1-2[D]$ は表現では実現できない。このようにして定理の証明は終る。

命題4．　G は非可解とする。e を非自明なべき等元とする。（G が非可解なのでこのようなべき等元は存在する。）このとき $1-2e$ は表現で実現されない。

G が有限群の場合は[10]で証明されている。我々は表現論

から得られる次の二つの補題を用いて上の命題を示すことにする。

補題5（[D0]）. Gは有限群とする。VをGの表現とする。任意のhyperelementary部分群Hに対し$\dim V^H$が偶数であれば任意の部分群Hに対し$\dim V^H$も偶数である。

補題6. Gを連結コンパクト・リー群とする。TをGの極大輪環とする。Tの正規化群NTの任意の閉部分群Hに対し，$\dim V^H$が偶数であれば，Gの任意の閉部分群に対して，$\dim V^H$も偶数である。

命題の証明　$1-2e$がVで実現されたとしよう。ここで$e(1)=0$と仮定してよい。(Burnside環の元を関数と見ることにする。）eが非自明なので$e(H)=1$となる閉部分群が存在する。そのようなもののうち極小な閉部分群をHとする。このとき容易に$\dim V^H$は奇数で$\dim V^K$ $(K<H)$は偶数であることを見ることができる。Hが連結の時，正規化群$N_H(T)$はHの真部分群になることがわかるので補題6より$\dim V^H$は偶数となり矛盾。Hが連結でなくH/H_0がhyperelementaryでないとき，補題5より$\dim V^H$は偶数となり矛盾。Hが連結で

なく H/H_0 が hyperelementary のとき，H/H_0 は可解であるから Smith理論より $e(H)=e(H_0)$ となり矛盾が起る。以上により命題は証明された。

注意. Burnside環の可逆元すべてがホモトピー表現で実現されるかどうかという問題はわかっていない。しかし，すべての元が半線形G球面で実現されるわけではない。

参考文献

[1] S. Bauer, Dimension functions of homotopy representations for a compact Lie groups, Math. Ann., 280 (1988), 247-265.

[2] T. Bröcker and T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer, 1985.

[3] J. F. Davis and T. tom Dieck, Some exotic dihedral actions on spheres, Indiana Univ. Math. J., 37 (1988), 431-450.

[4] T. tom Dieck, Transformation groups and representation theory, Lecture Notes in Math.,

766, Springer, 1979.

[5] T. tom Dieck, Transformation groups, Walter de Gruyter, 1987.

[6] T. tom Dieck and P. Löffler, Verschlingungen von Fixpunktmengen in Darstellungsformen I, Lecture Notes in Math., 1172 (1984), 167–187.

[7] T. tom Dieck and T. Petrie, Homotopy representations of finite groups, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 56 (1982), 129–169.

[8] E. Laitinen, Unstable homotopy theory of homotopy representations, Lecture Notes in Math., 1217 (1985), 210–248.

[9] I. Madsen and M. Raussen, Smooth and locally linear G-homotopy representations, Lecture Notes in Math., 1172 (1984), 130–156.

[10] T. Matsuda, On the units groups of Burnside rings, Japan. J. Math., 8 (1982), 71–93.

[11] M. Morimoto, On one fixed point actions on spheres, Proc. Japan Acad., 63 (1987), 95–97.

[12] I. Nagasaki, Semilinear G-spheres and homotopy representation groups, Lecture Notes in Math.,

1375 (1989), 259-268.

[13] I. Nagasaki, Remarks on semilinear G-spheres and units of the Burnside ring, preprint.

[14] R. Oliver, Smooth compact Lie group actions on disks, Math. Z., 149 (1976), 71-96.

[15] P. Traczyk, On the G-homotopy equivalences of spheres of representations, Math. Z., 161 (1978), 257-261.